UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Master Mathématiques / FHFS — 2020/2021

Feuille sinus et cotangente

Exercice

Etudiez la convergence des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z-n}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2 z}$.

Exercice

On considère la fonction

$$g(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$$

1. Montrez que g est méromorphe sur $\mathbf{C}$, 1-périodique et tend vers 0 lorsque $\mathrm{Im} z\to\pm\infty$, et ceci uniformément par rapport à $\mathrm{Re} z$.
2. Déduisez-en l'identité :
$$-\frac{d}{dz}\pi\cot(\pi z)=\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$$
3. Déduisez-en la somme de
$$\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n\neq 0}}\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}$$

Exercice

Etudiez la convergence des produits suivants : $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$.

Exercice

On considère le produit infini

$$f(z)=z\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

1. Justifier que f définit une fonction entière et préciser ses zéros ainsi que leurs ordres.
2. On pose $G(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ la dérivée logarithmique de f. Donner un développement de G en série et en déduire que $G'(z)$ n'est autre que la fonction $-g(z)$ de l'exercice précédent.
3. Montrer que $G(z)=\pi\cot(\pi z)$ et conclure que
$$f(z)=z\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$
4. En déduire
   (a) la valeur de $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ (formule de Wallis)
   (b) en développant le deux membres de l'égalité, la valeur de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ (formule d'Euler)
   (c) de la même manière la valeur de $\sum_{k>\ell\geq 1}\frac{1}{k^2}\frac{1}{\ell^2}$ puis celle de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$.
   (d) trouvez une référence pour le calcul de $\sum\frac{1}{n^{2k}}$

Exercice On note $\mathcal{P}$ l'ensemble ordonné des nombres premiers Montrez l'égalité d'Euler

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{p}\right)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$